

UNE NILVARIÉTÉ NON AFFINE

YVES BENOIST

Abstract

I construct compact nilvarieties which carry no complete affine structures. For that, I construct n -dimensional nilpotent Lie algebras with no faithful $(n + 1)$ -dimensional linear representations.

1. Introduction

1.1. Une structure affine sur une variété compacte $C^\infty W$ est la donnée d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans \mathbb{R}^n dont les changements de cartes sont localement des transformations affines de \mathbb{R}^n . Il est équivalent de se donner sur W une connexion ∇ plate et sans torsion. Il est aussi équivalent de se donner un difféomorphisme local D du revêtement universel \widetilde{W} de W dans \mathbb{R}^n , appelé développante, tel qu'il existe une représentation h du groupe fondamental $\pi_1(W)$, dans le groupe $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de \mathbb{R}^n , appelée holonomie, avec, pour w dans \widetilde{W} et γ dans $\pi_1(W)$, $D(\gamma w) = h(\gamma)D(w)$; si g est dans $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$, les développantes D et $g \circ D$ sont considérées comme équivalentes.

Une structure affine est dite complète si D est un difféomorphisme, ou, ce qui est équivalent, si la connexion ∇ est complète.

Les exemples les plus simples sont les tores \mathbb{T}^n dont le revêtement universel est l'espace affine \mathbb{R}^n . Ces exemples ont été généralisés à de nombreuses nilvariétés (resp. solvariétés): quotients de groupes de Lie nilpotents (resp. résolubles) par des sous-groupes discrets cocompacts (voir par exemple [13], [1], [9], [15], [6]). Ceci a conduit Scheuneman [13] et Milnor [9] à poser la question suivante (voir aussi [8], [2], [4], [10]): Toute nilvariété compacte admet-elle une structure affine complète? Nous montrons qu'il n'en est rien:

Théorème 1. *Il existe une nilvariété compacte W qui ne porte aucune structure affine complète.*

Les exemples que nous donnons sont de dimension 11. Nous conjecturons qu'il existe de tels exemples en toute dimension supérieure à 11. Nous

vérifions que, en dimension inférieure ou égale à 7, une telle structure affine complète existe toujours.

1.2. Le point de départ du raisonnement est le suivant: Soient N le groupe de Lie nilpotent, revêtement universel de W et $n = \dim(N)$. L'holonomie est une représentation affine fidèle du groupe fondamental $\pi_1(W)$. Elle induit donc une représentation affine fidèle de N (cf. [5]). Or $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $GL(\mathbb{R}^{n+1})$. On obtient ainsi une représentation linéaire fidèle de dimension $n+1$ de N et de son algèbre de Lie \mathfrak{n} . Le théorème 1 sera une conséquence du:

Théorème 2. *Il existe une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{n} de dimension n ($= 11$) qui n'admet aucune représentation linéaire fidèle de dimension $n+1$.*

Rappelons que la théorie d'Ado affirme que \mathfrak{n} admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie.

1.3. Soit $\bar{\mathfrak{n}}$ une algèbre de Lie positivement graduée, i.e., $\bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{i>0} \bar{\mathfrak{n}}_i$ avec $[\bar{\mathfrak{n}}_i, \bar{\mathfrak{n}}_j] \subset \bar{\mathfrak{n}}_{i+j}$. Soit $M^\nabla = \mathbb{R} \oplus \bar{\mathfrak{n}}$, le $\bar{\mathfrak{n}}$ -module défini par, pour X_i dans $\bar{\mathfrak{n}}_i$, X dans $\bar{\mathfrak{n}}$ et t dans \mathbb{R} : $X_i \cdot (t, X) = (0, itX_i + [X_i, X])$. C'est un $\bar{\mathfrak{n}}$ -module fidèle. En outre, il est gradué par $d^0(1, 0) = 0$ et $d^0(0, X_i) = i$. Cette remarque prouve que l'algèbre de Lie \mathfrak{n} n'est pas positivement graduée.

Le point clef de la démonstration du théorème 2 est l'étude des représentations graduées d'une algèbre de Lie nilpotente graduée $\bar{\mathfrak{n}}$ naturellement associée à \mathfrak{n} . En particulier, nous montrerons le:

Théorème 3. *Il existe une algèbre de Lie nilpotente $\bar{\mathfrak{n}}$ de dimension n ($= 11$), positivement graduée dont les seules représentations linéaires fidèles graduées de dimension $n+1$ sont M^∇ et son dual $(M^\nabla)^*$.*

2. Structure de la démonstration

2.1. Soit $\mathfrak{a}_{r,s,t}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs e_1, e_2 et les relations $[e_2, e_3] = e_5$ et $[e_2, e_5] = re_7 + se_8 + te_9$ où on a posé, pour $i \geq 2$, $e_{i+1} = [e_1, e_i]$. Soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{-2,1,t}$. Cette algèbre de Lie nilpotente est filiforme et de dimension 11: cf. 4.2.2 pour une description explicite des crochets de \mathfrak{n} . Elle admet deux filtrations décroissantes naturelles: la filtration par le degré: $\mathfrak{n}^{\geq i}$ est engendré par e_i, e_{i+1}, \dots pour $i \geq 1$, et la filtration par la suite centrale descendante: $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$ et \mathfrak{n}^i est engendré par e_{i+1}, e_{i+2}, \dots pour $i \geq 2$. On note $\bar{\mathfrak{n}}$ et $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$ les algèbres de Lie graduées associées respectivement à chacune de ces filtrations. On a les

égalités: $\bar{n} = \alpha_{-2,0,0}$ et $\bar{n} = F_{11}$ où F_n est l'algèbre de Lie définie par les générateurs T, X et les relations $X_n = 0$ et $[X_i, X_j] = 0$ pour $i, j \geq 1$, où on a posé $X_1 = X$ et $X_{i+1} = [X_1, X_i]$, pour $i \geq 1$.

2.2. A chaque n -module M (i.e., représentation linéaire de n), on associe naturellement des modules gradués \overline{M} et $\overline{\overline{M}}$ sur les algèbres de Lie graduées \bar{n} et $\overline{\bar{n}}$.

Soit M un n -module fidèle de dimension minimale m et supposons par l'absurde que $m \leq n + 1$. On peut supposer que M est nilpotent. On remarque en 3.2 que, comme n est filiforme, on a $m = n$ ou $m = n + 1$. On analyse alors successivement les modules $\overline{\overline{M}}$, puis \overline{M} et enfin M .

2.3. On décrit d'abord les formes possibles pour les modules $\overline{\overline{M}}$ (i.e., la suite des dimensions des composantes homogènes $\overline{\overline{M}}_i$); pour égayer le texte—il en a bien besoin—nous leur avons donné des noms; modules fils et modules doublés. On en déduit au §3 une liste de modules susceptibles d'apparaître comme modules $\overline{\overline{M}}$. Pour cela, on classe les F_n -modules (gradués) fils indécomposables en 3.4 et les F_n -modules doublés indécomposables en 3.5.

2.4. On en déduit au §4 quelles sont les diverses possibilités pour les modules \overline{M} : modules Fils (Cousus, Décousus, Troués, Bitroués, Troués-Décousus et Reprisés) ou modules Doublés (Troués et Bitroués).

2.5. Une étude de chacun de ces cas au §5 ne laisse que deux possibilités: $\overline{M} = M^\nabla$ ou $(M^\nabla)^*$. Cette étude est basée sur des calculs fastidieux: il s'agit de montrer que certaines familles de polynômes n'ont pas de zéros communs. Il s'agit donc de développer des polynômes, de calculer des polynômes résultants et de les factoriser. J'ai utilisé à plusieurs reprises un programme de calcul formel sur microordinateur pour mener à bien ces calculs; je le signale à chaque fois par le symbole: (MA_n) . Les calculs les plus longs sont pour les modules Cousus en 5.4: par exemple, les polynômes R_i de 5.4 ont une cinquantaine de termes. Le calcul à la main ne semble pas hors de portée, mais quelle économie de temps!

Au passage, on a démontré le théorème 3.

2.6. On vérifie alors en 5.6 que le \bar{n} -module M^∇ ne peut pas se déformer en un n -module M . Ce qui prouve le théorème 2.

2.7. Démonstration du théorème 1. On remarque que, lorsque t est rationnel (par exemple $t = 0$), le groupe de Lie connexe et simplement connexe N d'algèbre de Lie $n = \alpha_{-2,1,t}$ admet un sous-groupe discret cocompact Γ [9, chapitre II]. La nilvariété quotient $W = \Gamma \backslash N$ n'admet pas de structure affine complète.

3. Modules fidèles sur les algèbres de Lie filiformes

Le but de ce chapitre est d'étudier les modules fidèles de petite dimension sur une algèbre de Lie filiforme i.e. une algèbre de Lie nilpotente pour laquelle la filtration centrale descendante décroît le moins vite possible. Il est facile de décrire l'algèbre de Lie graduée associée \bar{n} (lemme 3.1); dans le cas qui nous intéresse, c'est l'algèbre de Lie $\bar{n} = F_n$.

La dimension minimale m des n -modules fidèles M est supérieure ou égale à la dimension n de n (lemme 3.2). Pour un tel module M de dimension m , que l'on peut supposer nilpotent, le \bar{n} -module gradué associé \bar{M} est un module gradué cyclique. Lorsque $m = n$ ou $n + 1$, ce module \bar{M} est soit un module fil, i.e., $\dim \bar{M}_i \leq 1$ pour tout i , soit un module doublé, i.e., il existe i_0 tel que $\dim \bar{M}_{i_0} = 2$ et $\dim \bar{M}_i \leq 1$ pour tout $i \neq i_0$ (lemme 3.3).

On décrit en 3.4 tous les F_n -modules fils cycliques et, en 3.5, tous les modules doublés cycliques.

3.1. Algèbres de Lie filiformes. Soient n une algèbre de Lie nilpotente de dimension n sur un corps K de caractéristique nulle et n^i la suite centrale descendante: $n^1 = n$ et $n^{i+1} = [n^1, n^i]$ pour $i \geq 1$. Soient $\bar{n}_i = n^i/n^{i+1}$ et $\bar{n} = \bigoplus_{i \geq 1} \bar{n}_i$: c'est une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$; elle est engendrée par ses éléments de degré 1.

Définition [14]. n est dite filiforme si $n \geq 2$ et, pour $i = 2, \dots, n$, on a $\text{codim } n^i = i$.

Exemples. 1. Si n est filiforme, alors \bar{n} aussi; et réciproquement.

2. Soit F_n l'algèbre de Lie graduée de base $T, X = X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$, avec $n \geq 2$, telle que $d^0 T = d^0 X = 1$ et

$$\begin{aligned} [T, X_i] &= X_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \\ [X_i, X_j] &= 0 \quad \forall i, j \geq 1. \end{aligned}$$

3. Soit \tilde{F}_{2n} l'algèbre de Lie graduée de base $T, X = X_1, X_2, \dots, X_{2n-2}, Y_{2n-1}$, avec $n \geq 3$, telle que $d^0 T = d^0 X = 1$ et

$$\begin{aligned} [T, X_i] &= X_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, 2n-3, \\ [T, X_{2n-2}] &= 0, \\ [X_i, X_j] &= (-1)^i \delta_{i, 2n-1-j} Y_{2n-1}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant affirme que toute algèbre de Lie filiforme est une déformation de F_n ou \tilde{F}_{2n} .

Lemme [14]. Toute algèbre de Lie filiforme graduée engendrée par ses éléments de degré 1 est isomorphe à F_n , pour $n \geq 2$, ou \tilde{F}_{2p} , pour $p \geq 3$.

Ce lemme ne nous sera utile que pour nous aider en 4.1 pour le choix de n .

3.2. Modules fidèles. Soit M un n -module nilpotent de dimension m , ce qui signifie que, pour tout X dans n , l'action de X dans M est nilpotente. Le module M est naturellement muni d'une filtration décroissante (M^i) définie par $M^1 = M$ et, pour $i \geq 1$, $M^{i+1} = n \cdot M^i$. Soient $\overline{M}_i = M^i/M^{i+1}$ et $\overline{M} = \bigoplus_{i \geq 1} \overline{M}_i$; c'est un \overline{n} -module gradué de dimension m (i.e., $\overline{n}_i \overline{M}_j \subset \overline{M}_{i+j} \forall i, j$); il est engendré par ses éléments de degré 1.

Le lemme suivant explique notre intérêt pour les algèbres de Lie filiformes.

Lemme. Soit n une algèbre de Lie filiforme de dimension n . Alors tout n -module fidèle est de dimension supérieure ou égale à n .

Démonstration. On peut supposer $n \geq 3$ et K algébriquement clos. On a une décomposition (unique) du module M en sous-modules indexés par les caractères de n : $M = \bigoplus M_c$ de telle sorte que, en notant K_c le n -module de dimension 1 donné par le caractère c , le module produit tensoriel $M_c \otimes K_{-c}$ est nilpotent. Soit $\mathcal{Z} = n^{n-1}$ le centre de n ; il est de dimension 1. Comme M est fidèle, il agit non trivialement sur un des modules $M_c \otimes K_{-c}$. Donc, quitte à remplacer M par $M_c \otimes K_{-c}$, on peut supposer que M est nilpotent.

Remarquons qu'alors l'égalité $M^i = M^{i+1}$ implique $M^i = 0$. Or, comme M est fidèle, on a $M^n \supset n^{n-1} \cdot M^1 = \mathcal{Z} \cdot M \neq 0$. On en déduit: $\dim M_i \geq 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$. En particulier, $\dim M \geq n$.

3.3. La forme des modules fidèles.

Définition. La forme d'un module gradué $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ est la suite (nulle pour $|i|$ suffisamment grand) $p_i := \dim V_i$.

Le module gradué est dit fil si $p_i \leq 1$ pour tout i .

Il est dit doublé si $p_i \leq 1$ sauf pour exactement une valeur i_0 pour laquelle $p_{i_0} = 2$.

Rappelons qu'un module est dit cyclique s'il est engendré par un de ses vecteurs et est dit indécomposable s'il n'est pas la somme directe de deux sous-modules non nuls.

Soit m la plus petite des dimensions des n -modules fidèles et M un n -module de dimension m , que l'on suppose nilpotent grâce à 3.2. C'est un n -module nilpotent cyclique, il est donc indécomposable; le \overline{n} -module gradué \overline{M} aussi. Comme \overline{n} est engendré par ses éléments de degré 1, l'ensemble $\{i / \dim \overline{M}_i \neq 0\}$ est un intervalle de \mathbb{Z} .

Lemme. Soient n une algèbre de Lie filiforme de dimension n et M un n -module nilpotent fidèle de dimension minimale m . On suppose

$m \leq n + 1$. Alors on est dans un des trois cas suivants:

- (α) $m = n$ et \overline{M} est un \overline{n} -module fil fidèle.
- (β) $m = n + 1$ et \overline{M} est un \overline{n} -module fil non fidèle.
- (γ) $m = n + 1$ et \overline{M} est un \overline{n} -module doublé fidèle.

Démonstration. On reprend la démonstration du lemme 3.2: le inégalités finales et la majoration $m \leq n + 1$ prouvent qu'on est dans un des trois cas suivants:

- (α) $m = n$, \overline{M} est un \overline{n} -module fil et $M^{n+1} = 0$.
- (β) $m = n + 1$, \overline{M} est un \overline{n} -module fil et $\dim M^{n+1} = 1$.
- (γ) $m = n + 1$, \overline{M} est un \overline{n} -module doublé et $M^{n+1} = 0$.

Soit Z un générateur du centre $\mathcal{Z} = n^{n-1}$ de n .

Lorsque $M^{n+1} = 0$, comme $Z \cdot M \neq 0$, Z induit une application non nulle de \overline{M}_1 dans \overline{M}_n . Le module \overline{M} est donc fidèle.

Lorsque $\dim M^{n+1} = 1$, si \overline{M} est un \overline{n} -module fidèle, l'action de Z sur \overline{M}_1 ou \overline{M}_2 est non nulle et le n -module M/M^n ou M^1 est fidèle. Ceci contredit la minimalité de m .

Nous savons que $\overline{n} = F_n$ ou \tilde{F}_{2p} . Nous allons étudier plus précisément le module \overline{M} lorsque $\overline{n} = F_n$: les case (α) et (β) en 3.4 et le cas (γ) en 3.5.

3.4. Les F_n -modules fils indécomposables. Remarquons que tout F_n -module est aussi un $F_{n'}$ -module pour tout $n' \geq n$. Nous appellerons F -module, un module V sur l'un des F_n et profondeur de V , le plus petit entier $n = \text{prof}(V) \geq 2$ tel que V est un F_n -module.

Soit V un F -module fil indécomposable de dimension p et v_1, \dots, v_p une base homogène de V telle que $d^0 v_i = i$ (on se ramène à ce cas en translatant la graduation). Pour définir notre module V , il suffit de se donner les éléments $\lambda_i \in \mathbb{P}^1 := K \cup \{\infty\}$, pour $i = 1, 2, \dots, p - 1$, tels que

$$Xv_i = \lambda_i Tv_i$$

(lorsque $\lambda_i = \infty$, cette égalité doit se lire: $Tv_i = 0$). En effet, comme V est indécomposable, la famille Tv_i, Xv_i engendre V_{i+1} .

Proposition. Soit V un F -module fil indécomposable, alors V est l'un des modules K, A, B, C ou D du tableau I.

Dans ce tableau, le diagramme associé à chaque module est construit de la façon suivante: un arc \frown relie les $i^{\text{ème}}$ et $(i + 1)^{\text{ème}}$ points si et seulement si $Tv_i \neq 0$; un arc en pointillé signifie que Tv_i peut être nul ou non nul. Et de même pour les arcs \smile avec Xv_i .

TABLEAU I. F -Modules fils Indécomposables					
Nom	Définition	Paramètres	Diagramme	Dim V	Prof V
K	Module Trivial			1	2
A^p_λ	$\lambda_i = \lambda$	$p \geq 2, \lambda \in \mathbb{P}^1$		p	2
$B^p_{\alpha, \beta}$	$\lambda_i = (\alpha_i + \beta)^{-1}$	$p \geq 3,$ $\alpha \in K \setminus \{0\},$ $\beta \in K$		p	p
$CP_{i, \lambda}$	$\lambda_i = \lambda \delta_{i, l}$	$p \geq 3,$ $1 \leq l \leq p-1,$ $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$		p	p
$DP_{\lambda, \mu}$	$\lambda_i =$ $\lambda \delta_{i, l} + \mu \delta_{i, p-1}$	p impair, $p \geq 5,$ $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\},$ $\mu \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$		p	p $si \lambda \neq \mu$ $p-1$ $si \lambda = \mu$

Corollaire. (a) Soient $n \geq 3$ et V un F_n -module fil fidèle et indécomposable; alors $\dim V = n$ ou $n + 1$.

(b) Si $\dim V = n$, alors V est de type B ou C , ou de type D avec $\lambda \neq \mu$.

Démonstration de la proposition. Supposons $p \geq 2$. Quitte à remplacer T par $T + \gamma X$, on peut supposer que, pour tout $i = 1, \dots, p - 1$, on a $\lambda_i \neq \infty$. On choisit alors la base v_i de sorte que $Tv_i = v_{i+1}$. On a donc $Xv_i = \lambda_i v_{i+1}$, et pour tout $r = 1, \dots, p$ et $i = 1, \dots, p - r$, $X_r v_i = (\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j \lambda_{i+j}) v_{i+r}$. La relation $[X_1, X_{r-1}]v_i = 0$ s'écrit, pour tout $r = 3, \dots, p$ et $i = 1, \dots, p - r$:

$$(E_i^r) \quad \lambda_i \left(\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j C_{r-2}^j \lambda_{i+j+1} \right) = \lambda_{i+r-1} \left(\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j C_{r-2}^j \lambda_{i+j} \right).$$

Distinguons quatre cas:

(i) Les λ_i sont tous non nuls. Soit $\mu_i = 1/\lambda_i$; l'équation E_i^3 s'écrit: $\mu_i + \mu_{i+2} = 2\mu_{i+1}$. Les μ_i sont en progression arithmétique: V est de type B ou de type A avec $\lambda \neq 0$.

(ii) Il existe au moins un λ_i nul et au moins deux λ_i non nuls. Montrons que deux λ_i consécutifs ne peuvent pas être simultanément non nuls: sinon, on pourrait remplacer V par un sous-quotient de dimension 4 tel

TABLEAU II. Extensions des F -Modules fils pour $k = p \geq 4$			
Nom	\tilde{V} / \tilde{V}_k	Paramètres	Diagramme
$A_0^{p,p}$	A_0^{p-1}	$p \geq 4$	
$C_{1,\lambda}^{p,p}$	$C_{1,\lambda}^{p-1}$	p impair, $p \geq 5$, $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$	

que $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_3 = 0$ (ou $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$). Ceci contredit l'égalité $E_1^3 : (\lambda_1 + \lambda_3) \lambda_2 = 2 \lambda_1 \lambda_3$.

Montrons que seuls λ_1 et λ_{p-1} sont non nuls: sinon, quitte à remplacer V par un sous-quotient, on peut supposer $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = \dots = \lambda_{p-2} = 0$, et $\lambda_{p-1} \neq 0$ (ou $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_{p-3} = 0$, $\lambda_{p-2} \neq 0$, et $\lambda_{p-1} = 0$). L'équation E_1^{p-1} s'écrit alors: $\lambda_2 \lambda_{p-1} = 0$ (ou $\lambda_1 \lambda_{p-2} = 0$). Contradiction.

Montrons que p est impair: en effet, l'équation E_1^{p-1} s'écrit: $(-1)^{p-1} \lambda_1 \lambda_{p-1} = \lambda_{p-1} \lambda_1$. Le module V est donc de type D .

(iii) Il y a exactement un λ_i non nul. Le module V est de type C .

(iv) Tous les λ_i sont nuls. Le module V est de type A avec $\lambda = 0$.

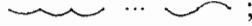
3.5. Les F_n -modules doubles cycliques. Soit \tilde{V} un F -module cyclique de dimension $p+1$ doublé en k avec $2 \leq k \leq p$. C'est à dire qu'il a une base $v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, w_k, v_{k+1}, \dots, v_p$ (le degré d'un vecteur est donné par son indice). Il n'est pas restrictif de Supposer que $u_k = T v_{k-1}$ et $w_k = X v_{k-1}$.

3.5.1. Etudions tout d'abord le cas $k = p$. Le module \tilde{V} est alors caractérisé par son quotient \tilde{V} / \tilde{V}_k . Le lemme suivant décrit donc \tilde{V} ; ce lemme est résumé dans le tableau II.

Lemme. Soit \tilde{V} un F -module doublé cyclique avec $k = p \geq 4$; alors \tilde{V} / \tilde{V}_k est isomorphe soit à A_0^{p-1} , soit, si p est impair, à $C_{1,\lambda}^{p-1}$ avec λ dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$.

Démonstration. Le module $V' := \tilde{V} / K u_k$ est un module fil cyclique; d'après 3.4, il est isomorphe à A_∞^p , $B_{\alpha,\beta}^p$ avec $\alpha p + \beta = 0$, $C_{p-1,\infty}^p$ ou $D_{\lambda,\mu}^{2q+1}$ avec $q \geq 2$ et λ dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$.

Le premier cas est impossible car le module $V'' := \tilde{V} / K w_k$ serait un module fil cyclique de diagramme:



ce qui est exclus. De même, le deuxième cas est impossible.

3.5.2. Dans ce paragraphe, on suppose que $k \leq p - 1$ et que \tilde{V} est une extension d'un module fil cyclique V de base v_1, \dots, v_p par le module trivial (en degré k):

$$0 \rightarrow Kv'_k \rightarrow \tilde{V} \rightarrow V \rightarrow 0.$$

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ les paramètres de définition de V . Puisque \tilde{V} est une extension de V , les noyaux de T et de X dans \tilde{V}_k coïncident: c'est la droite $K(v'_k - \lambda_k v_k)$. Le module \tilde{V} est entièrement caractérisé par le module V et l'entier k . Et réciproquement.

Lorsque $k = 2$ ou 3 , le module V est quelconque dans le tableau I.

Lorsque $k \geq 4$, le module $\tilde{V}_{[1,k]} := \tilde{V}/(\bigoplus_{i>k} \tilde{V}_i)$ fait partie de ceux décrits dans le lemme 3.5.1. On a donc démontré le lemme suivant.

Lemme. *Soit \tilde{V} un F -module doublé cyclique qui est une extension en degré $k \leq p - 1$ d'un module fil V . Alors \tilde{V} est entièrement caractérisé par le couple (V, k) et réciproquement. La liste de ces modules est donnée dans le tableau III (p. 30).*









3.5.3. Dans ce paragraphe, on suppose que \tilde{V} n'est pas une extension et que $\dim V = p + 1 \geq 7$. On a $2 \leq k \leq p - 1$.

Définissons, comme en 3.4, des éléments λ_i de \mathbb{P}^1 , par $Xv_i = \lambda_i T v_i$, pour $i = 1, \dots, k - 2, k + 1, \dots, p - 1$. Rappelons que $u_k = T v_{k-1}$ et $w_k = X v_{k-1}$. Soient α, β, γ , et δ les scalaires donnés par: $T u_k = \alpha v_{k+1}$, $X u_k = \beta v_{k+1}$, $T w_k = \gamma v_{k+1}$, et $X w_k = \delta v_{k+1}$. Nous verrons que $\delta = 0$. On peut donc supposer que $\gamma = 1$, car \tilde{V} n'est pas une extension. Le couple (α, β) ne dépend pas alors des choix faits.

Lemme. *Soit \tilde{V} un F -module cyclique de dimension $p + 1 \geq 7$, doublé en k et qui n'est pas une extension d'un module fil par un module trivial. Alors \tilde{V} est un des modules E, F , ou G du tableau IV (p. 31).*

Démonstration. Quitte à remplacer \tilde{V} par son dual, on peut supposer que $k \leq 4$. Remarquons tout d'abord que le module $\tilde{V}_{[1,k]}$ est un de ceux du tableau II. En particulier, on a $\lambda_{k-3} = \lambda_{k-2} = 0$. On note E_i^r l'équation: $[X_1, X_{r-1}]v_i = 0$.

L'équation E_{k-2}^3 donne alors $\delta = 0$. C'est ce que l'on avait annoncé. On peut donc supposer $\gamma = 1$. L'équation E_1^k s'écrit:

TABLEAU III. Extensions des F -Modules fils pour $2 \leq k \leq p-1$				
Nom	Extension de	Paramètres		Diagramme
$A_{\lambda}^{p,k}$	A_{λ}^p	$\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, k=2 \text{ ou } 3$		 si $\lambda = \infty$
				 si $\lambda \neq \infty$
	$\lambda = 0, 2 \leq k \leq p-1$			
$B_{\alpha, \beta}^{p,k}$	$B_{\alpha, \beta}^p$	$\alpha \in K \setminus \{0\}, \beta \in K, k=2 \text{ ou } 3$		(omis)
$C_{l, \lambda}^{p,k}$	$C_{l, \lambda}^p$	$2 \leq k \leq p-1$ $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$	$k \leq l \leq p-1$	
			$k = l+1$	
			$l=1, k \text{ impair}$ $3 \leq k \leq p-1$	
$D_{\lambda, \mu}^{p,k}$	$D_{\lambda, \mu}^p$	$p \text{ impair}$ $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ $\mu \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ $2 \leq k \leq p-1$	$k=2$	
			$k \text{ impair}$	

$$X((\text{ad } T)^{k-2}(X))v_1 - ((\text{ad } T)^{k-2}(X))Xv_1 = 0,$$

puis $((1 - (-1)^k)XT - (k-2)TX)T^{k-3}Xv_1 = 0$. Elle donne donc $(2\beta - (k-2))Xv_1 = 0$ (Remarquer que, lorsque k est pair, Xv_1 est nul). Ceci démontre le lemme lorsque $p = k+1$.

Supposons $p \geq k+2$. Les équations E_{k-1}^3 et E_{k-3}^5 donnent respectivement $(\beta-2)Xv_{k+1} = 0$ et $(\beta-3)Xv_{k+1} = 0$. On en déduit $\lambda_{k+1} = 0$. Ceci démontre le lemme lorsque $p = k+2$ (remarquer que l'équation E_1^{k+1} se traduit par $(k-1)(2\beta - (k-2))Xv_1 = 0$, ce que l'on savait déjà).

Supposons $p \geq k+3$. Le raisonnement précédent s'applique au module dual de \tilde{V} ; donc $\lambda_{k+2} = 0$. L'équation E_1^{k+2} donne alors:

TABLEAU IV. F -Modules Cycliques Doublés
Qui ne Sont Pas des Extensions pour $p \geq 6$

Nom	Definition	Paramètres	Diagramme
$E_{\alpha, \beta}^{pk}$	$\lambda_i = 0$	$2 \leq k \leq p-1$ $\alpha \in K, \beta \in K \setminus \{0\}$	
$F_{\alpha, \lambda}^p$	$\lambda_i = \lambda \delta_{i, 1}$ $\beta = (k-2)/2$ k impair, $p-k = 1$ ou 2	$\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$, $\alpha \in K$	ou
$G_{\alpha, \lambda}^p$	$\lambda_i = \lambda \delta_{i, p-1}$ $\beta = 2/(p-k-1)$ $k = 2$ ou 3 , $p-k$ pair	$\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$, $\alpha \in K$	ou

$k(k-1)(3\beta - (k-2))Xv_1 = 0$. On en déduit que $Xv_1 = 0$. En appliquant de nouveau ce raisonnement au module dual de \tilde{V} , on en déduit que \tilde{V} est de type E .

4. α_r -modules

Le but de 4.1 et de 4.2 est d'expliquer pourquoi, heuristiquement, les algèbres de Lie $\mathfrak{n} = \alpha_{r,s,t}$ sont de bonnes candidates pour notre théorème 2. La seule information indispensable pour la suite est l'existence, lorsque $r = -2$ et $s = 1$, de cette algèbre de Lie filiforme \mathfrak{n} de dimension $n = 11$ engendrée par deux éléments e_1, e_2 vérifiant les relations annoncées (cf. 2.1).

Ces algèbres de Lie \mathfrak{n} admettent une deuxième filtration naturelle; par le degré; on note $\bar{\mathfrak{n}}$ l'algèbre de Lie graduée associée. Le résultat principal de ce chapitre est la proposition 4.3.1 et le tableau V qui décrivent la liste des $\bar{\mathfrak{n}}$ -modules gradués \bar{M} associés, a priori, à des \mathfrak{n} -modules fidèles M de dimension minimale $m = n$ ou $n+1$. La démonstration occupe les trois paragraphes 4.4, 4.5 et 4.6; chacun d'eux correspondant à une des trois formes possibles pour le module \bar{M} (lemme 3.3).

L'étude de chacun des cas du tableau V sera l'objet du chapitre suivant.

4.1. Les algèbres de Lie α_r . Motivé par le lemme 3.2, on cherche une algèbre de Lie nilpotente filiforme \mathfrak{n} de dimension n . On suppose

que l'algèbre de Lie graduée associée à la filtration centrale descendante est l'algèbre de Lie F_n (c'est le cas le plus simple; cf. le lemme 3.1). Notons e_1 et e_2 deux éléments de \mathfrak{n} dont les images dans F_n sont T et X respectivement et posons $e_{i+1} = [e_1, e_i]$, pour $i \geq 2$. Ces éléments engendrent l'espace vectoriel \mathfrak{n} .

Soit $\mathfrak{n}^{\geq i}$ l'idéal de \mathfrak{n} engendré par e_i, e_{i+1}, \dots ; par construction, on a $[\mathfrak{n}^{\geq i}, \mathfrak{n}^{\geq j}] \subset \mathfrak{n}^{\geq i+j}$. Soient $\bar{\mathfrak{n}}_1 = \mathfrak{n}^{\geq i} / \mathfrak{n}^{\geq i+1}$ et $\bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{i \geq 1} \bar{\mathfrak{n}}_i$; $\bar{\mathfrak{n}}$ est une algèbre de Lie filiforme graduée engendrée par \bar{e}_1 et \bar{e}_2 où \bar{e}_i est l'image de e_i dans $\bar{\mathfrak{n}}_i$.

Intéressons nous tout d'abord à cette algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{n}}$. On suppose que $[\bar{e}_2, \bar{e}_3] \neq 0$ (c'est le cas le plus simple). Quitte à remplacer e_1 par $a_0 e_1$ avec $a_0 \neq 0$, on peut supposer que $[\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{e}_5$. Jacobi donne alors l'égalité $[\bar{e}_2, \bar{e}_4] = \bar{e}_6$. On a alors $[\bar{e}_2, \bar{e}_5] = r \bar{e}_7$ où r est un scalaire. Il est donc naturel de définir:

Définition. Soit α_r l'algèbre de Lie graduée (éventuellement de dimension infinie) définie par les générateurs f_1, f_2 de degré 1 et 2 et les relations: $[f_2, f_3] = f_5$, et $[f_2, f_5] = r f_7$, où on a posé $f_{i+1} = [f_1, f_i]$, pour $i \geq 2$.

Le lemme suivant prouve que, en général, ces deux relations suffisent pour définir une algèbre de Lie filiforme.

Lemme. (a) Si $r \neq \frac{9}{10}$ et 1, l'algèbre de Lie graduée α_r est de dimension finie; elle est filiforme si et seulement si $r \neq 0, 2$ et 3; elle est alors de dimension 11.

(b) Si $r = \frac{9}{10}$, α_r est de dimension infinie, de base $(f_i)_{i \geq 1}$, avec $[\tilde{f}_i, \tilde{f}_j] = (j-i)\tilde{f}_{i+j}$, pour $i, j \geq 1$ où $\tilde{f}_i = f_i / (i-2)!$; c'est la partie positive de l'algèbre de Virasoro.

(c) Si $r = 1$, α_r est de dimension infinie, de base $(f_i)_{i \geq 1}$, avec

$$\begin{aligned} [f_1, f_i] &= f_{i+1} \quad \text{pour } i \geq 2, \\ [f_2, f_i] &= f_{i+2} \quad \text{pour } i \geq 3, \\ [f_i, f_j] &= 0 \quad \text{pour } i, j \geq 3. \end{aligned}$$

Démonstration. On suppose $r \neq 0, \frac{9}{10}, 1, 2$, et 3. Ces cas particuliers ne nous seront pas utiles, ils sont laissés au lecteur.

Pour $n \geq 6$, on note $J(n)$ l'ensemble des relations de Jacobi:

$$J_{i,j,k} : [f_i, [f_j, f_k]] + [f_j, [f_k, f_i]] + [f_k, [f_i, f_j]] = 0$$

pour $i < j < k$ et $i + j + k = n$. On écrit $f_{i,j}$ pour $[f_i, f_j]$. On a

$f_{2,3} = f_5$ et $f_{2,5} = rf_7$. On calcule, successivement:

$$J(6) \Leftrightarrow f_{2,4} = f_6,$$

$$J(7) \Leftrightarrow f_{3,4} = (1-r)f_7,$$

$$J(8) \Leftrightarrow f_{2,6} = (2r-1)f_8,$$

$$f_{3,5} = (1-r)f_8,$$

$$J(9) \Leftrightarrow (r-3)f_{2,7} = (3-5r)f_9,$$

$$(r-3)f_{3,6} = 2r(r-1)f_9,$$

$$(r-3)f_{4,5} = -3(r-1)^2f_9,$$

$$J(10) \Leftrightarrow (r-3)f_{2,8} = -r(5r-3)f_{10},$$

$$(r-3)f_{3,7} = (r-1)(5r-3)f_{10},$$

$$(r-3)f_{4,6} = -3(r-1)^2f_{10},$$

$$J(11) \Leftrightarrow 2r(r-2)f_{2,9} = -(5r^3 + r^2 - 7r + 3)f_{11},$$

$$2r(r-2)(r-3)f_{3,8} = -(r-1)(5r^3 - 7r^2 + 15r - 9)f_{11},$$

$$2r(r-2)(r-3)f_{4,7} = 3(r-1)^2(5r^2 - 6r + 3)f_{11},$$

$$2r(r-2)(r-3)f_{5,6} = -3(r-1)^3(7r-3)f_{11}.$$

$J(12)$ est alors un système de neuf équations linéaires en $f_{12}, f_{2,10}, f_{3,9}, f_{4,8}$ et $f_{5,6}$ qui n'a de solutions que lorsque $r = 1$ ou $9/10$: les calculs sont laissés au lecteur, ils ne nous seront pas utiles.

4.2. Les algèbres de Lie $\alpha_{r,s,t}$. Continuons notre petit raisonnement qui nous mènera aux algèbres de Lie $\alpha_{-2,1,t}$.

4.2.1. Les générateurs e_1, e_2 vérifient des relations du type:

$$[e_2, e_3] = e_5 + \sigma e_6 + \tau e_7 + \nu e_8 + \dots,$$

$$[e_2, e_5] = re_7 + se_8 + te_9 + \dots.$$

Le choix de ces générateurs e_1 et e_2 n'est pas unique: on peut les remplacer par $e_1 + a_1e_2 + a_2e_2 + \dots$ et $b_0e_2 + b_1e_3 + b_2e_4 + \dots$.

Lemme. Si $r \neq 0, 1, 2, 3, -3$, et $\frac{3}{7}$, on peut choisir les générateurs e_1 et e_2 de sorte que $[e_2, e_3] = e_5$.

Démonstration. On suppose en outre $r \neq \frac{9}{10}$ (le cas où $r = \frac{9}{10}$ est laissé au lecteur). Remarquons que l'automorphisme $\exp(t \operatorname{ad}(e_q))$ modifie les générateurs mais pas leurs relations. On peut donc se contenter d'étudier des modifications de générateurs du type: $\delta(e_1) = a_1e_2$ et $\delta(e_2) = b_2e_4 + b_3e_5 + \dots$. On note $e_{i,j}$ pour $[e_i, e_j]$.

Si $\delta(e_1) = a_1 e_2$, alors $\sigma([e_2, e_3] - e_5) = -2a_1 e_6 + \dots$.

Si $\delta(e_2) = b_q e_{q+2}$, alors $\delta([e_2, e_3] - e_5) = b_q (e_{2, q+3} - e_{3, q+2} - e_{q+5}) + \dots$.
On vérifie à l'aide de 4.1 que le vecteur $v_q := e_{2, q+3} - e_{3, q+2} - e_{q+5}$ est non nul pour $q = 2, \dots, 6$ (inutile d'aller plus loin car, d'après 4.1, $\dim n \leq 11$): en effet,

$$\begin{aligned} v_2 &= 2(r-1)e_7 + \dots, & v_3 &= 3(r-1)e_8 + \dots, \\ v_4 &= -2 \frac{(r-1)(r+3)}{(r-3)} e_9 + \dots, \\ v_5 &= -10 \frac{r(r-1)}{(r-3)} e_{10} + \dots, & v_6 &= \frac{3(r-1)(7r-3)}{2r(r-2)(r-3)} e_{11}. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien le lemme.

4.2.2. Si on évite ces valeurs particulières de r , il est naturel de poser:

Définition. Soit $\alpha_{r,s,t,\dots}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs e_1 et e_2 et les relations: $[e_2, e_3] = e_5$ et $[e_2, e_5] = re_7 + se_8 + te_9 + \dots$ où on a posé $e_{i+1} = [e_1, e_i]$, pour $i \geq 2$.

On a bien sur, $\alpha_r = \alpha_{r,0,0,\dots}$ et on pose $\alpha_{r,s} = \alpha_{r,s,0,0,\dots}$, etc.

Lemme. (a) Si $r \neq \frac{9}{10}$ et 1, l'algèbre de Lie $\alpha_{r,s,\dots}$ est de dimension finie; si en outre, $r \neq 0, 2$ et 3, elle est filiforme de dimension 11 et l'algèbre de Lie graduée associée $\overline{\alpha_{r,s,\dots}}$ est l'algèbre α_r .

(b) Si $r \neq 0$, les algèbres de Lie $\alpha_{r,s,t}$ et $\alpha_{r',s',t'}$ sont isomorphes si et seulement si, il existe $a \neq 0$ tel que $r' = r$, $s' = as$ et $t' = a^2 t$.

Démonstration. (a) La seule difficulté est de montrer qu'il existe une algèbre de Lie de dimension 11 engendrée par deux éléments e_1 et e_2 vérifiant les deux relations ci-dessus. Pour cela, on calcule explicitement les divers crochets $e_{i,j} := [e_i, e_j]$ par récurrence à l'aide des relations de Jacobi comme en 4.1 et on vérifie qu'elles sont compatibles. Contentons nous de donner les crochets de l'algèbre de Lie $\alpha_{-2,s,t}$, à charge pour le lecteur de vérifier les relations de Jacobi (MA_1):

Crochets de $\alpha_{-2,s,t}$ (algèbre de Lie de base e_1, \dots, e_{11}):

$$\begin{aligned} e_{1,i} &= e_{i+1} \text{ pour } i \geq 2; & e_{2,3} &= e_5; & e_{2,4} &= e_6; \\ e_{2,5} &= -2e_7 + se_8 + te_9, & e_{3,4} &= 3e_7 - se_8 - te_9; \\ e_{2,6} &= -5e_8 + 2se_9 + 2te_{10}, & e_{3,5} &= 3e_8 - se_9 - te_{10}; \\ e_{2,7} &= -(13/5)e_9 + (51/25)se_{10} + (448s^2 + 2475t)/2000e_{11}, \\ e_{3,6} &= -(12/5)e_9 - (1/25)se_{10} + (-448s^2 + 1525t)/2000e_{11}, \\ e_{4,5} &= (27/5)e_9 - (24/25)se_{10} + (448s^2 - 3525t)/2000e_{11}; \end{aligned}$$

$$e_{2,8} = \frac{26}{5}e_{10} + \frac{28}{25}se_{11}, \quad e_{3,7} = \frac{-39}{5}e_{10} + \frac{23}{25}se_{11}, \quad e_{4,6} = \frac{27}{5}e_{10} - \frac{24}{25}se_{11};$$

$$e_{2,9} = \frac{19}{16}e_{11}, \quad e_{3,8} = \frac{321}{80}e_{11}; \quad e_{4,7} = \frac{-189}{16}e_{11}, \quad e_{5,6} = \frac{1377}{80}e_{11}.$$

(b) C'est clair. Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 4.2.1: supposons pour simplifier $r \neq 1, 2, 3, -3$, et $3/7$; la relation $[e_2, e_3] = e_5$ implique que les générateurs e_1 et e_2 de $\mathfrak{a}_{r,s,t}$ sont uniques modulo des automorphismes de $\mathfrak{a}_{r,s,t}$ et modulo la transformation: $(e_1, e_2) \rightarrow (e_1, ae_2)$. Cette transformation est un isomorphisme entre $\mathfrak{a}_{r,s,t}$ et \mathfrak{a}_{r,as,a^2t} .

Remarques. On peut vérifier que, pour $r = 9/10$ et $s_i = \delta_{i,q}$ avec $q \geq 2$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{r,s_1,s_2,\dots}$ est de dimension finie $n' = q + 12 \geq 14$. Je crois, mais je ne l'ai pas vérifié, qu'elle n'admet pas de représentation fidèle de dimension $n' + 1$.

Pour $r = 1$, je ne sais pas si il existe des algèbres de Lie $\mathfrak{a}_{r,s_1,s_2,\dots}$ de dimension finie.

4.2.3. Supposons que r ne prend pas une des valeurs particulières ci-dessus (par exemple $r = -2$; la valeur $r = -1$ paraît plus simple, mais nous verrons qu'il existe un \mathfrak{a}_{-1} -module Doublé-Bitroué fidèle de dimension $n + 1 \dots$).

L'algèbre de Lie candidate que nous cherchons est un quotient $\mathfrak{a}_{r,s,\dots}[n]$ de $\mathfrak{a}_{r,s,\dots}$ par la relation $e_{n+1} = 0$. Si n n'est pas égal à $\mathfrak{a}_{r,s,\dots}$, la représentation adjointe dans $\mathfrak{a}_{r,s,\dots}[n+1]$ donne une représentation linéaire fidèle de n dans un espace de dimension $n + 1 \dots$ donc, on doit prendre $n = \mathfrak{a}_{r,s,\dots}$.

Comme n ne doit pas être une algèbre de Lie graduée, il est naturel de prendre $s = 1$. En faisant varier t on obtient une infinité de candidates.

C'est ainsi que j'ai rencontré pour la première fois $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$.

4.3. La forme des \mathfrak{a}_r -modules \overline{M} .

4.3.1. Désormais nous prendrons $n = \mathfrak{a}_{r,s,\dots}$. Le cas qui nous intéresse est $r = -2, s = 1$ ou 0 , mais la plupart des arguments de cette partie ne font pas appel à ces valeurs particulières.

Soit M un n -module fidèle nilpotent de dimension minimale $m = n$ ou $n + 1$, comme en 3.3. En particulier, M est cyclique. On pose $M^{\geq 0} = M^{\geq 1} = M$ et, pour $i \geq 2$, $M^{\geq i} = e_1 M^{\geq i-1} + e_2 M^{\geq i-2}$. Soient $\overline{M}_i = M^{\geq i} / M^{\geq i+1}$ et $\overline{M} = \bigoplus_{i \geq 1} \overline{M}_i$. \overline{M} est un \bar{n} -module de dimension m gradué et cyclique par construction.

Le but de ce chapitre est de décrire la liste des \bar{n} -modules a priori possibles pour \overline{M} et utilisant les renseignements sur le module \overline{M} que nous

avons obtenus dans le chapitre 3.

Proposition. *Supposons $r \neq 0, 9/10, 2$ et 3 . Soient $n = a_{r,s,\dots}$, $n = \dim n$ et M un n -module fidèle nilpotent de dimension minimale $m = n$ ou $n + 1$. Alors, on est dans un des deux cas suivants:*

(a) \overline{M} est d'un des huit types définis dans le tableau V: module Fil (Troué, Bitroué, Cousu, Décousu, Reprisé et Troué-Décousu) et module Doublé (Doublé-Troué et Doublé-Bitroué).

(b) \overline{M} est un module Doublé, extension d'un module Troué ou Bitroué de dimension n par le module trivial en degré k , avec $2 \leq k \leq n - 1$.

Remarque. Lorsque $r = 9/10$, il y a une autre possibilité: \overline{M} peut être isomorphe à un des modules $B_{\alpha,\beta}^p$ ou $B_{\alpha,\beta}^{p,k}$. Un tel module M est appelé "Bizarre".

Dans le tableau V, la définition du type se lit sur le diagramme: comme en 3.4, une base du module gradué est formé des vecteurs v_i pour les i tels qu'il existe un point noir à la $i^{\text{ème}}$ place. Un arc \frown relie les $i^{\text{ème}}$ et $(i + 1)^{\text{ème}}$ points si et seulement si $e_i v_i \neq 0$ (un arc en pointillé signifie que $e_i v_i$ peut être nul ou non nul). Et de même avec e_2 pour les arcs \smile qui relient les $i^{\text{ème}}$ et $(i + 2)^{\text{ème}}$ points.

Le losange



symbolise six vecteurs de la base: $v_{k-2}, v_{k-1}, u_k, w_k, v_{k+1}$, et v_{k+2} (le degré de ces vecteurs est donné par leur indice), tels que $e_1 v_{k-2} = v_{k-1}$, $e_1 v_{k-1} = u_k$, et $e_2 v_{k-2} = w_k$ et tel que le module gradué n'est pas une extension d'un module Fil par le module trivial (gradué en $d^0 k$).

Remarque. Soit q le plus grand entier tel qu'il existe un point noir à la $q^{\text{ème}}$ place. On a $q \geq n + 1$ et lorsque $q = n + 1$, \overline{M} est un module fidèle (c'est le cas pour les modules Troués, Cousus, et Décousus).

En effet, comme M est fidèle, $e_n M = e_n M^{\geq 1} \subset M^{\geq n+1}$ est non nul, et, comme $q = n + 1$, $e_n M^{\geq 2} \subset M^{\geq n+2} = 0$. Donc le générateur e_n du centre de n induit une application non nulle de \overline{M}_1 dans \overline{M}_{n+1} . Le module \overline{M} est donc fidèle.

4.3.2. La fin de ce chapitre est consacrée à la démonstration de cette proposition. On ne peut pas, en général, pour un n -module nilpotent M' , retrouver la forme du module \overline{M}' à partir du module \overline{M}' ni d'ailleurs retrouver la forme de module \overline{M} à partir du module \overline{M} . Ce sera cependant souvent vrai pour notre module M .





On distingue les trois cas du lemme 3.3:

TABLEAU V. Types Possibles pour les Modules \overline{M}			
Type	m	Paramètres	Diagramme
Troué	n	$2 \leq k \leq n$	
Bitroué	n	n impair	
Cousu	$n+1$		
Décousu	$n+1$	$1 \leq k \leq n$	
Reprisé	$n+1$	$1 \leq k \leq n-1$	
Troué-Décousu	$n+1$	$(l, l') = (2, n-1), (2, n), (n+1, 2)$ ou $(n+1, 3)$	
Double-Troué	$n+1$	$l = 2, 5 \leq k \leq n-1$ ou $l = n, 3 \leq k \leq n-3$	
Double-Bitroué	$n+1$	n et k impairs $5 \leq k \leq n-2$	

4.4 $m = n$ et \overline{M} est un \overline{n} -module fil fidèle. D'après 3.4, \overline{M} est isomorphe à un des modules $B_{\alpha, \beta}^m, C_{1, \lambda}^m$, ou $D_{\lambda, \mu}^m$.

4.4.1. Le premier cas est exclu à cause du lemme:

Lemme. Si $r \neq 9/10$, il n'existe pas de $\alpha_{r, s, \dots}$ -module nilpotent V de dimension $p \geq 7$ tel que \overline{V} est isomorphe à $B_{\alpha, \beta}^p$.

TABLEAU VI. Règle de Transformation	
Diagramme de \bar{M}	→ Diagramme de \bar{M}
$i \quad i+1$ 	$j \quad j+1$ 
$i \quad i+1$ 	$j \quad j+1 \quad j+2$ 

Démonstration. Par hypothèse, il existe une base v_1, \dots, v_p de V telle que,

$$\begin{aligned} e_1 v_i &= (\alpha i + \beta) v_{i+1} + x_i v_{i+2} \pmod{V^{i+3}}, \\ e_2 v_i &= v_{i+1}, \end{aligned}$$

où x_1, \dots, x_{p-2} sont des scalaires et où V^i est le sous-espace vectoriel de base v_i, v_{i+1}, \dots . On a l'égalité, pour $k \geq 2$:

$$e_k v_i = (k-2)! \alpha^{k-2} v_{i+k-1} \pmod{V^{i+k}}.$$

Notons $y_i = x_{i+1} - x_i$. On calcule:

$$e_3 v_i = \alpha v_{i+2} + y_i v_{i+3} \pmod{V^{i+4}}.$$

La composante de $([e_2, e_3] - e_5) v_i$ sur v_{i+4} donne l'égalité: $y_{i+1} - y_i = -6\alpha^3$, pour $i = 1, \dots, p-4$. On calcule alors:

$$\begin{aligned} e_4 v_i &= 2\alpha^2 v_{i+3} + (6\alpha^3(\alpha i + \beta) - 6\alpha^4 + 5\alpha y_i) v_{i+4} \pmod{V^{i+5}}, \\ e_5 v_i &= 6\alpha^3 v_{i+4} + (48\alpha^4(\alpha i + \beta) - 60\alpha^5 + 26\alpha y_i) v_{i+5} \pmod{V^{i+6}}. \end{aligned}$$

La composante de $([e_2, e_5] - r e_7 - s e_8 \dots) v_i$ sur v_{i+6} donne alors l'égalité: $\alpha^5(10r - 9) = 0$. Contradiction avec $\alpha \neq 0$ et $r \neq 9/10$.

Remarque. Si $r = 9/10$, il existe un α_r -module Bizarre (i.e., tel que $\bar{V} = B_{\alpha, \beta}^p$) en toute dimension $p \geq 3$.

4.4.2. Les deux derniers cas $\bar{M} = C_{l, \lambda}^m$ et $\bar{M} = D_{\lambda, \mu}^m$ donnent des modules \bar{M} respectivement Troués et Bitroués. Cela résulte du lemme:

Lemme. Soit M un $\alpha_{r, s, \dots}$ -module nilpotent cyclique tel que \bar{M} est un module fil. Alors le diagramme de \bar{M} se déduit de celui de \bar{M} grâce à la règle du tableau VI.

Démonstration. Rappelons que par définition, $M^i = e_1 M^{i-1} + e_2 M^{i-1}$ et $M^{\geq j} = e_1 M^{\geq j-1} + e_2 M^{\geq j-2}$. On procède par récurrence: on suppose que, pour certaines valeurs de i et j , on a $M^{\geq j} = M^i$ et $M^{\geq j+1} = M^{i+1}$. Dans le premier cas, on a alors $M^{\geq j+2} = M^{i+2}$, tandis que dans le deuxième cas, on a $M^{\geq j+2} = M^{i+1}$ et $M^{\geq j+3} = M^{i+2}$.

4.5. $m = n + 1$ et $\overline{\overline{M}}$ est un $\overline{\overline{n}}$ -module fil non fidèle. D'après 3.4, $\overline{\overline{M}}$ est isomorphe au module A_λ^m . Le lemme suivant et le lemme 4.4.2 prouvent que $\overline{\overline{M}}$ est un module Cousu.

Lemme. $\lambda = 0$.

Démonstration. Sinon, il existe une base v_1, \dots, v_{n+1} de M telle que

$$e_1 v_i = \mu v_{i+1} + x_i v_{i+2} \pmod{M^{i+3}} \quad \text{et} \quad e_2 v_i = v_{i+1},$$

où $\mu := 1/\lambda$ est dans K et x_1, \dots, x_{n-1} sont des scalaires. Donc, si on pose $y_i = x_{i+1} - x_i$, on a

$$e_3 v_i = y_i v_{i+3} \pmod{M^{i+4}}$$

et

$$e_4 v_i = -\mu(y_{i+1} - y_i)v_{i+4} \pmod{M^{i+5}}.$$

La composante de $([e_2, e_3] - e_5)v_i$ sur v_{i+4} donne l'égalité:

$$y_{i+1} - y_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-3.$$

On en déduit $e_4 v_i \in M^{i+5}$, puis, pour tout $j \geq 4$, $e_j M^i \subset M^{i+j+1}$. En particulier $e_n M = e_n M^1 \subset M^{n+2} = \{0\}$. Donc la représentation n'est pas fidèle. Contradiction.

4.6. $m = n + 1$ et $\overline{\overline{M}}$ est un $\overline{\overline{n}}$ -module double fidèle. Les divers cas possibles pour le module $\overline{\overline{M}}$ sont répertoriés dans les tableaux II, III, et IV.

Le module $\overline{\overline{M}}$ ne peut pas être de type A car le module M ne serait pas fidèle (voir la deuxième remarque de 4.3.1).

Le module $\overline{\overline{M}}$ ne peut pas être du type B car le sous module M^4 qui est de dimension $n-3 \geq 8$ serait un module Bizarre, ce qui est exclu par le lemme 4.4.1 car $r \neq 9/10$.

Le module $\overline{\overline{M}}$ est donc du type C, D, E, F , ou G .

4.6.1. Le tableau VII (p. 40) donne la règle qui permet de calculer (la plupart du temps de façon biunivoque) le diagramme de $\overline{\overline{M}}$ à partir de celui de \overline{M} (et réciproquement le diagramme de \overline{M} à partir de celui de $\overline{\overline{M}}$).

TABLEAU VII. Règle de Transformation Pour les Modules Doubés										
Diagramme de \overline{M}				Diagramme de \overline{M}				i'	j'	
i	$i+1$	$i+2$	$i+3$	j	$j+1$	$j+2$	$j+3$	$j+4$		
				\longleftrightarrow					$i+1$	$j+1$
				\longleftrightarrow					$i+1$	$j+2$
				\longleftrightarrow					$i+2$	$j+4$
				\longleftrightarrow					$i+2$	$j+3$
				\longleftrightarrow					$i+2$	$j+3$
				\longleftrightarrow					$i+3$	$j+4$
				\longrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ou} \end{array} \right.$ 				$i+3$	$j+4$
				\longrightarrow					$i+3$	$j+3$

Ce tableau doit se lire ainsi: Si on sait que, pour certaines valeurs de i et j ,

$$(*) \quad M^i = M^{\geq j} \text{ et } M^{i+1} = M^{\geq j+1}$$

et si le diagramme de \overline{M} entre les points i et i' est dans la partie gauche du tableau alors le diagramme de \overline{M} entre les points j et j' est donné dans la partie droite et on a:

$$(*') \quad M^{i'} = M^{\geq j'} \text{ et } M^{i'+1} = M^{\geq j'+1}.$$

Ce qui permet de réutiliser cette règle à partir du point i' .

Réciproquement, sauf dans le dernier cas, si on a $(*)$ et si le diagramme de \overline{M} entre les points j et j' est dans la partie droite du tableau, alors le diagramme de \overline{M} est donné dans la partie gauche et on a $(*)'$.

Démonstration de la règle du tableau VII. Cela résulte des définitions.

La vérification est laissée au lecteur. Les deux premiers cas sont étudiés en 4.4.2.

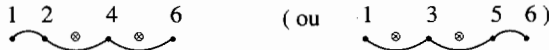
Etudions par exemple le dernier cas. On peut supposer $i = j = 1$ et M de dimension 5. Le diagramme de \overline{M} signifie qu'il existe une base v_1, u_2, w_2, v_3, v_4 de M telle que:

$$e_1 v_1 = u_2, \quad e_1 u_2 = v_3, \quad e_1 w_2 = \beta v_4, \quad e_1 v_3 = v_4, \quad e_1 v_4 = 0, \\ e_2 v_1 = w_2, \quad e_2 u_2 = \alpha v_4, \quad e_2 w_2 = \gamma v_4, \quad e_2 v_3 = 0, \quad e_2 v_4 = 0,$$

où α, β, γ sont des scalaires. On calcule alors: $M^{\geq 1} = M^1, M^{\geq 2} = M^2, M^{\geq 3} = \langle w_2, v_3, v_4 \rangle, M^{\geq 4} = \langle v_4 \rangle$. Si $\gamma \neq 0$, on a $M^{\geq 5} = \langle v_4 \rangle$ et $M^{\geq 6} = 0$, tandis que si $\gamma = 0$, on a $M^{\geq 5} = 0$; on obtient ainsi les deux diagrammes pour le module \overline{M} .

Commentaire sur le tableau VIII (p. 42). Le cas n°1 est exclu car le n -module $M' := M/M^{\geq n+2}$ serait un module fidèle de dimension $m - 1$, ce qui contredit la minimalité de m . En effet, le \bar{n} -module \overline{M}' est Troué, il est donc fidèle: calculer $e_n v_1 = (e_1)^{n-2} e_2 v_1 \neq 0$.

Les cas n°2, 7 et 10 sont exclus car \overline{M} admettrait un sous-quotient gradué de dimension 4 qui serait un \bar{n} -module gradué de diagramme:



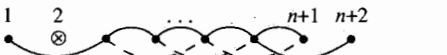
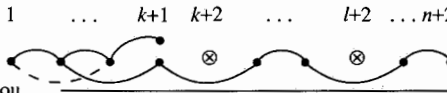

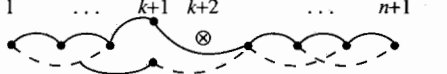

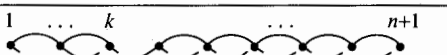
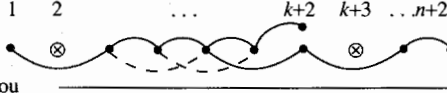
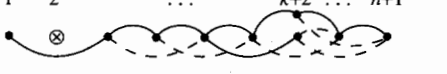

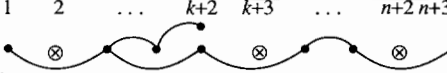
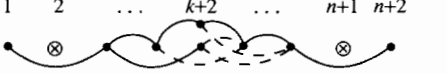
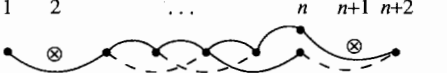

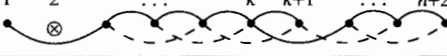
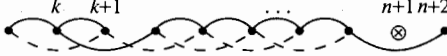
On calcule alors: $([e_2, e_3] - e_3)v_1 = -e_2 e_2 e_1 v_1 \neq 0$. Contradiction.

Dans le cas n°3, si $1 \neq n - 1$, alors \overline{M} est une extension d'un module Troué, sinon le $(\alpha_r = \bar{n})$ -module dual de \overline{M} qui est encore fidèle et cyclique aurait pour diagramme le diagramme symétrique de celui de \overline{M} , or un tel diagramme ne fait pas partie de notre liste.

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.3.1.

5. α_2 -modules

Le but de ce chapitre est de terminer la démonstration du théorème 2 avec $n = \alpha_{-2,1,t}$ (et donc $n = 11$). On montre tout d'abord que les seuls α_{-2} -modules gradués qui sont d'un des types du tableau V sont, d'une part, les modules M^∇ et $(M^\nabla)^*$ définis dans l'introduction: ce sont des modules Décousus avec $k = 2$ et $k = n - 1$ respectivement, et, d'autre part, le module Cousu sur lequel e_2 agit trivialement (ce module qui n'est pas fidèle ne nous intéresse pas). Cette affirmation résulte d'une étude de chacun des cas du tableau V menée dans les parties 5.2 à 5.7. Elle dépend fortement du choix de la valeur $r = -2$, elle est probablement encore vraie pour r en dehors d'un ensemble fini; mais, pour $r = 9/10$, il existe de

Tableau VIII. Liste des Diagrammes de \bar{M} - Obtenus par la Regle du Tableau VII			
\bar{M}	Paramètres	Diagramme de \bar{M}	Module \bar{M}
$C_{l,k}^n$	$k = n, l = 1$		exclus 1
	$k + 2 \leq l \leq n - 1$		exclus 2
			Doublé-Troué ou Extension de Troué 3
	$k = l - 1$		Extension de Troué 4
	$k = l$		Reprisé 5
	$k = l + 1$		Décousu 6
	$l = 1, k \text{ impair}, 3 \leq k \leq n - 1$		exclus 7
		Doublé-Troué ou Extension de Troué 8	
$D_{\alpha,\mu}^n$	$k = 2, n \text{ impair}$		Troué-Décousu 9
	$n, k \text{ impairs } 3 \leq k \leq n - 4$		exclus 10
			Doublé-Bitroué ou Extension de Bitroué 11
	$n \text{ impair}, k = n - 2$		Extension de Bitroué 12
$E_{\alpha,\beta}^n$	$2 \leq k \leq n - 1$		Décousu 13
$F_{\alpha,\lambda}^n$	$k = n - 1 \text{ ou } n - 2$		Troué-Décousu 14
$G_{\alpha,\lambda}^n$	$k = 1 \text{ ou } 2$		Troué-Décousu 15

nombreux modules Cousus, Troués, Reprisés... ; pour $r = -1$, il existe un module Doublé-Bitroué. La démonstration du théorème 3, avec $\bar{n} = \alpha_{-2}$ est donnée en 5.8.

Dans la dernière partie, nous montrons que les modules M^∇ et $(M^\nabla)^*$ ne peuvent pas se déformer en des n -modules. Ce qui prouve le théorème 2 avec $n = \alpha_{-2,1,t}$.

5.1. α_r -modules fils. Lorsqu'ils n'ont pas de trous, les α_r -modules Fils ont une base v_1, \dots, v_q avec $e_1 v_i = a_i v_{i+1}$ et $e_2 v_i = b_i v_{i+2}$. Les scalaires $(a_i)_{1 \leq i \leq q-1}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq q-2}$ définissent un α_r -module si et seulement si les $2q - 2$ équations suivantes sont satisfaites:

$$R_i^5: \quad ([e_2, e_3] - e_5)v_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, q - 5,$$

$$R_i^7: \quad ([e_2, e_5] - re_7)v_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, q - 7.$$

Quitte à modifier, les vecteurs de bases, on supposera $a_i = 0$ ou 1: On a $q - 1$ inconnues.

Lorsque tous les a_i sont égaux à 1 (modules Cousus), on a

$$e_r v_i = \left(\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j C_{r-2}^j b_{i+j} \right) v_{i+r}.$$

On en déduit, dans ce cas, les formules pour R_1^5 et R_1^7 :

$$R_1^5: \quad b_4(b_1 - b_2) - b_1(b_3 - b_4) - (b_1 - 3b_2 + 3b_3 - b_4) = 0,$$

$$R_1^7: \quad b_6(b_1 - 3b_2 + 3b_3 - b_4) - b_1(b_3 - 3b_4 + 3b_5 - b_6) \\ - r(b_1 - 5b_2 + 10b_3 - 10b_4 + 5b_5 - b_6) = 0.$$

Nous ne recopions pas (MA_2) la formule pour R_i^5 (resp. R_i^7) lorsque certains des a_i sont nuls: elle s'obtient à partir de celle de R_1^5 (resp. R_1^7) en décalant les indices de $i - 1$ et en éliminant les termes de cette somme où n'apparaissent ni b_j ni b_{j-1} à chaque fois que a_j s'annule pour j dans $\{i, \dots, i + 4\}$ (resp. j dans $\{i, \dots, i + 6\}$).

Pour les modules ayant un Trou à la $k^{\text{ème}}$ place, les mêmes formules sont valables si on pose: $a_{k-1} = a_k = b_{k-2} = b_k = 0$ et $b_{k-1} = 1$.

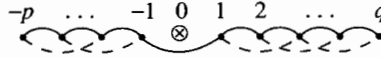
Les modules que nous étudions dans les parties 5.2 à 5.7 sont les modules dont le diagramme est décrit dans le tableau V. L'entier n sera considéré comme arbitraire: la valeur qui nous intéresse est $n = \dim n = 11$.

Remarque. Lorsque $r = 9/10$, il existe de nombreux modules Fils donnés par $a_i = u + i$ et $b_i = v + i$ où u, v sont des scalaires arbitraires.

5.2. Modules trous. Le but de cette partie est de montrer le

Lemme. Soit V un \mathfrak{a}_{-2} -module Troué de dimension n . Alors $n \leq 10$.

Translatons la graduation de sorte que le trou soit en 0. Le module V a pour base $v_{-p}, \dots, v_{-1}, v_1, \dots, v_q$ avec $p \geq 1$, $q \geq 1$, et $n = p + q$. On peut supposer $a_i = 1$ sauf $a_{-1} = a_0 = 0$ et $b_{-2} = b_0 = 0$, $b_{-1} = 1$.



Le lemme résulte alors des deux lemmes suivants appliqués à V ou V^* .

5.2.1. $p \geq 2$.

Lemme. Soit V un \mathfrak{a}_r -module Troué en 0, avec $r \neq 9/10$.

(a) Si $p \geq 2$ alors $q \leq 5$.

(b) Si $p \geq 3$ alors $q \leq 3$.

Démonstration. (MA_3) Si $p \geq 2$ et $q \geq 5$; $R_{-2}^5 \Rightarrow b_1 = 3$; $R_{-1}^5 \Rightarrow b_2 = 2$.

(a) Si $q \geq 6$; $R_{-2}^7 \Rightarrow b_3 = 5/3r$; $R_1^5 \Rightarrow b_4 = 2r - 3/5$ et $R_{-1}^7 \Rightarrow r = 9/10$, contradiction.

(b) Si $p \geq 3$; $R_{-3}^5 \Rightarrow b_{-3} = -3$ et $R_{-3}^7 \Rightarrow r = 9/10$, contradiction.

5.2.2. $p = 1$.

Lemme. Soit V un \mathfrak{a}_{-2} -module Troué avec $p = 1$. Alors:

(a) pour tout $i \neq 1$ et 3, b_i est uniquement déterminé par les $(b_j)_{j < i}$ grâce aux équations R_{i-3}^5 et R_{i-5}^7 ,

(b) on a $q \leq 9$.

Démonstration. (MA_3) Posons $b_1 = x$; $R_{-1}^5 \Rightarrow b_2 = (x + 1)/2$;

$$R_1^5 \text{ et } R_{-1}^7 \Rightarrow b_3 = 3x^2 + 18x - 5/2(5x - 9),$$

$$b_4 = (x + 3)(x + 4)/(5x + 9),$$

$$R_2^5 \Rightarrow b_5 = \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 90}{7x^2 - 16x - 31},$$

$$R_3^5 \Rightarrow b_6 = \frac{3x^5 + 57x^4 + 310x^3 - 238x^2 + 6119x - 2923}{4(7x^2 - 16x - 31)(x^2 + 8x - 13)},$$

$$R_4^5 \Rightarrow b_7$$

$$= \frac{3x^7 + 91x^6 + 903x^5 + 3927x^4 - 487x^3 + 81169x^2 - 2979x - 63171}{4(x^2 + 8x - 13)(3x^2 + 2x - 69)(3x^2 + 18x - 5)}.$$

Le seul intérêt de ces formules (dont le dénominateur est automatiquement non nul) est de donner une idée de la complexité des calculs. On

calcule alors les numérateurs des fractions rationnelles en x , R_1^7 et R_2^7 ; ce sont des polynômes en x de degré 5 et 10 dont la seule racine commune est $x = 1$; R_5^5 et R_3^7 donnent alors $376b_8 = 709$ et $20b_8 = -637$, contradiction.

5.3. Modules Bitroués et Troués-Décousus.

Lemme. Soit $r = -2$. (a) Il n'existe pas de α_r -modules Bitroués de dimension $n \geq 8$.

(b) Il n'existe pas de α_r -modules Troués-Décousus de dimension $n + 1 \geq 11$.

Démonstration. (MA_4) (a) On décale la graduation de sorte que le trou de gauche soit en 0 et celui de droite en $n - 1$. On pose $b_1 = x$. Si $n \geq 8$, les formules pour b_2, \dots, b_{n-4} de 5.2.2 sont valables et on a $n \leq 11$.

Si $n = 8$ (resp. 9, 10), on calcule alors les numérateurs des fractions rationnelles en x : R_{n-5}^5 et R_{n-7}^7 . Ce sont des polynômes en x de degré 2 et 2 (resp. 4 et 4, 5, et 6) qui n'ont pas de racines communes, contradiction.

Si $n = 11$, on a $x = 1$, mais $R_6^5 \neq 0$, contradiction.

(b) Soit V un α_r -module Troué-Décousu de dimension $n + 1$. Supposons par exemple que $l = 2$. Le module V a alors un quotient de dimension $n - 2$ ou $n - 1$ qui est Bitroué. Le (a) donne alors $n - 2 < 8$.

5.4. Modules cousus.

Lemme. Pour $r = -2$, les seuls α_r -modules Fils Cousus de dimension $n \geq 11$ sont les modules "constants" $V = C_x$ donnés par $b_i = x$, pour $i = 1, \dots, n - 2$.

Remarque. Le module C_x n'est pas fidèle. Il ne peut donc pas être égal à notre module \overline{M} .

Démonstration. (MA_5) On dispose de 9 inconnues b_1, \dots, b_9 qui doivent satisfaire les 10 équations $R_1^5, \dots, R_6^5, R_1^7, \dots, R_4^7$. Posons $b_4 = x$, $b_5 = y$, $b_6 = z$; à l'aide de $R_3^5, R_4^5, R_2^5, R_5^5, R_1^5, R_6^5$ on peut exprimer successivement $b_3, b_7, b_2, b_8, b_1, b_9$ comme des fractions rationnelles en x, y, z . On note R_1, \dots, R_4 les numérateurs des fractions rationnelles en x, y, z : R_1^7, \dots, R_4^7 . Ces numérateurs sont nuls (cela est vrai même si les dénominateurs pour exprimer les b_i s'annulent!). Ce sont des polynômes en x, y, z de degré inférieur ou égal à 6. On montre tout d'abord le lemme suivant, puis on vérifie que, dans les cas (b) et (c), les équations $((R_i^5)_{1 \leq i \leq 6}, (R_i^7)_{1 \leq i \leq 4})$ n'ont pas de solutions.

Lemme. Les zéros communs de R_1, R_2, R_3, R_4 sont

(a) $x = y = z$,

(b) $(x, y, z) = (5, 2, -1), (2, -1, -1), (1, 1, -2)$ et $(1, -2, -5)$,

$$(c) (x, y, z) = (-2 + \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{-3}, \sqrt{-3}), (-1 + 2\sqrt{-3}, \sqrt{-3}, 1 + 2\sqrt{-3}), \text{ et } (\sqrt{-3}, 1 + 2\sqrt{-3}, 2 + \sqrt{-3}).$$

Démonstration. (MA_5) Soient R_{ij} les résultants de R_i et R_j par rapport à x (Rappelons que si deux polynômes ont une racine commune, leur résultant est nul). On factorise:

$$R_{ij} = (y - z)^5 S_{ij}$$

avec:

$$S_{13} = (1 + y - 2z)^2 S_{13}^3 S_{13}^4,$$

$$S_{23} = (1 + y - 2z)(1 + 5y - 5z - yz) S_{23}^3 S_{23}^4,$$

$$S_{34} = (1 + 2y - z)(1 + 5y - 5z - yz) S_{24}^3 S_{34}^4,$$

où S_{ij}^k sont des polynômes en y, z de degré total inférieur ou égal à 6. Cette factorisation permet de continuer les calculs en maniant des polynômes de taille raisonnable. Remarquons que, des six polynômes S_{ij} , les trois ci-dessus sont ceux de plus petite taille car $d_x^0 R_3 = 2$ alors que, pour $i \neq 3$, $d_x^0 R_i = 3$.

On distingue plusieurs cas:

(1) $y = z$. On obtient $x = y = z$ ou $(x, y, z) = (2, -1, -1)$.

(2)(i) $y \neq z$ et $y = 2z - 1$. Les équations R_{ij} donnent $y = 3$ ou $-1 + 2\sqrt{-3}$.

(ii) $y \neq z$ et $z = 2y + 1$. Les équations R_{ij} donnent $y = \sqrt{-3}$.

(iii) $y \neq z$ et $(y + 5)z = 5y + 1$. Les équations R_{ij} donnent $y = 3$ ou $1 + 2\sqrt{-3}$.

Ces trois cas donnent les trois valeurs du (c) (en fait six valeurs car $\sqrt{-3}$ désigne l'une des deux racines carrées de -3).

(3) L'un des deux derniers facteurs de S_{13} , de S_{23} et de S_{34} est nul. Pour chaque choix de facteurs (il y a $2^3 = 8$ choix), on calcule les racines du pgcd des résultants en z de ces facteurs deux à deux. On trouve $y = -2, -1, 0, 1$ ou 2 . Ce qui donne les valeurs du (b) (la valeur $y = 0$ donne $(x, y, z) = (0, 0, 0)$).

5.5. Modules décousus. Soit V un α_r -module Décousu (en -1): il admet une base v_{-p}, \dots, v_q , avec $p \geq 1, q \geq 0$, telle que $a_i = 1$, pour tout i sauf $a_{-1} = 0$ et b_{-2}, b_{-1} ne sont pas simultanément nuls.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & -1 & 0 & 1 & 2 & & & q \\ & & & & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowleft \\ & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Par exemple, le module M^∇ de 1.3 (avec $\bar{n} = \alpha_r$) est un module

Décousu (en $+1$); en effet $e_1.(0, e_i)$ est nul si et seulement si $i = 1$ ou n .

Lemme. Soient $r = -2$ et V un α_r -module Décousu de dimension $n+1 = 12$; alors V est isomorphe (via un isomorphisme gradué) au module M^∇ ou à son dual $(M^\nabla)^*$.

Démonstration. (MA_6) Quitte à remplacer V par son dual, on suppose $q \geq 5$. Si $p = 1$ ou si $b_{-2}b_{-1} = 0$, V admet un sous-quotient de dimension 11 qui est Troué, ce qui est exclu par 5.2. On a donc $p \geq 2$ et $b_{-2}b_{-1} \neq 0$. Remarquons que $V_{[-1, q]}/V_0$ est un module troué pour lequel les calculs de 5.2.2 sont valables. On pose $b_1 = x$, on a $b_2 = (x+1)/2$. On distingue plusieurs cas:

5.5.1. $q \geq 7$.

Les formules pour b_1, \dots, b_{q-2} de 5.2.2 sont valables. On peut supposer $b_{-2} = 2$.

$$R_0^5 \Rightarrow b_0 = \frac{3x^3 + 19x - 22}{x^2 + 30x + 17};$$

$$R_{-2}^5 \Rightarrow b_{-1} = \frac{2(x^3 - 59x^2 + 15x - 5)}{(x-3)(x^2 + 30x + 17)}.$$

On calcule alors les numérateurs des fractions rationnelles en x , R_{-2}^7 et R_0^7 , ce sont des polynômes en x de degré 4 et 6 dont la seule racine commune est $x = 1$.

On ne peut pas avoir $p \geq 3$, car $R_{-3}^5 \Rightarrow b_{-3} = -9$ et $R_{-3}^7 \Rightarrow b_{-3} = 49$.
Donc, $p = 2$ et $q = 9$ et la suite $(b_i)_{-2 \leq i \leq 7}$ est égale à $(2, -1, 0, 1, 1, -2, -5, -13/5, 26/5, 19/16)$: c'est le module M^∇ .

5.5.2. $q = 5$ ou 6.

On a donc $p \geq 4$. On peut supposer $b_{-1} = 1$.

$$R_{-3}^7 \Rightarrow b_{-3} = (3x + 43 - (3x + 23)b_{-2})/2$$

$$R_{-2}^5 \text{ et } R_{-3}^5 \Rightarrow b_{-2} = (x+55)/(-x+31), \quad b_0 = (3x^2 + 75x + 38)/(x+55)$$

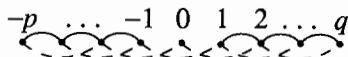
$$R_{-4}^7 \Rightarrow b_{-4} = (2x^2 + 87x + 240)/(2x - 9)$$

Le numérateur de R_{-4}^5 est alors égal à $58(x+12)(3x-7) = 0$.

Si $x = 7/3$, $R_0^5 \Rightarrow b_3 = 13/10$ mais $R_{-2}^7 \Rightarrow b_3 = 10$, contradiction.

Si $x = -12$, $R_0^5 \Rightarrow b_3 = -129/14$ mais $R_{-2}^7 \Rightarrow b_3 = -35/2$, contradiction.

5.6. Modules reprisés. Soit V un α_r -module Reprisé (en 0): c'est un α_r -module Fil indécomposable qui admet une base v_{-p}, \dots, v_q avec $p \geq 1, q \geq 1$ telle que $a_i = 1$ pour tout i sauf $a_{-1} = a_0 = 1$.



Lemme. Soit $r = -2$. Alors il n'existe pas de α_r -modules Reprisés de dimension $n + 1 = 12$.

Démonstration. (MA_7) Quitte à changer V en son dual, on suppose $q \geq 6$. Si $p = 1$ ou si $b_{-2}b_0 = 0$, V admet un sous-quotient de dimension 11 qui est Troué: ce qui est exclu par 5.2. On a donc $p \geq 2$ et on peut supposer que $b_0 = b_{-2} = 1$. Soit $b_{-1} = x$. $R_{-2}^5 \Rightarrow b_1 = (3x - 1)/x$; $R_{-1}^5 \Rightarrow b_2 = (4x - 1)/2x$; $R_0^5 \Rightarrow b_3 = (6x - 1)/4x$; $R_{-2}^7 \Rightarrow x = -1/58$. Mais alors $R_1^5 \Rightarrow b_4 = 248/23$ tandis que $R_{-1}^7 \Rightarrow b_4 = 7$, contradiction.

5.7. Modules doublés. Le but de cette partie est de démontrer le lemme:

Lemme. Soit $r = -2$. Alors il n'existe pas de modules Doublés-Troués ni Doublés-Bitroués de dimension $n + 1 = 12$.

5.7.1. Décalons la graduation de sorte que le doublet soit en degré 0. Le module V a une base $v_{-p}, \dots, v_{-1}, u_0, w_0, v_1, \dots, v_q$ avec un Trou en $-p + 1$ ou (non exclusif) en $q - 1$. On a

$e_1 v_{-2} = v_{-1}, e_1 v_{-1} = u_0, e_1 u_0 = cv_1, e_1 w_0 = dv_1, e_1 v_i = v_{i+1},$
 $e_2 v_{-2} = w_0, e_2 v_{-1} = fv_1, e_2 u_0 = gv_2, e_2 w_0 = hv_2, e_2 v_i = b_i v_{i+2}$
 pour les autres valeurs de i , sauf, comme d'habitude au voisinage des Trous

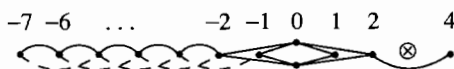
Lemme ($r = -2$). (a) S'il y a un Trou en $q - 1$, alors $q = 4$ ou 6 .

(b) S'il y a un Trou en $-p + 1$, alors $p = 4$ ou 6 .

Démonstration. Comme, par hypothèse, le module V n'est pas une extension, il suffit de montrer (b), quitte à remplacer V par son dual. En quotientant $V_{[-p, 0]}$ par la droite $K(u_0 - \lambda w_0)$ de V_0 , on construit une famille de modules Troués (en $-p + 1$) ayant les mêmes b_j pour $j = -p + 2, \dots, -3$ mais pour lesquels $b_{-2} = \lambda$ est arbitraire. Le lemme 5.2.2a donne alors $p - 1 = 3$ ou 5 .

Il suffit pour conclure d'éliminer les trois cas suivants (MA_8):

5.7.2. $p = 7, q = 4$, Trou en $d^0 3$.



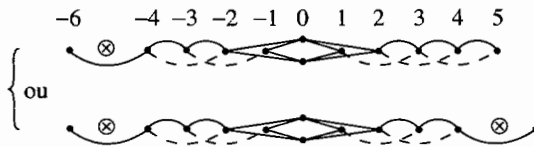
Nous allons voir que le module $V_{[-7,0]}$ ne peut pas exister. Remarquons que R_{-5}^5 donne deux relations: si on pose $b_{-4} = x$, on obtient $b_{-3} = (5x + 1)/(x + 5)$ et $b_{-5} = (x - 1)/2$.

$$R_{-6}^5 \Rightarrow b_{-6} = \frac{-2(2x^2 + x + 3)}{(x - 1)(x - 3)}$$

$$R_{-7}^5 \Rightarrow b_{-7} = \frac{-(7x^2 + 8x + 9)}{(x - 1)(3x - 1)}.$$

R_{-7}^7 donne aussi deux relations. Les numérateurs de ces relations sont des polynômes en x de degré 5 qui n'ont pas de racines communes, contradiction.

5.7.3. $p = 6, q = 5$, Trou en $d^0 - 5$ ou $p = 6, q = 6$, Trou en $d^0 - 5$ et $+5$.



Dans ces deux cas, posons $b_{-4} = x$; $R_{-6}^5 \Rightarrow b_{-3} = (x + 1)/2$;

(i) Si $c \neq 0$. On peut supposer $c = 1$.

$$R_{-4}^5 \text{ et } R_{-6}^7 \Rightarrow d = \frac{3x^2 + 18x - 5}{2(5x - 9)}, \quad f = \frac{(x + 3)(x + 4)}{5x - 9};$$

$$R_{-3}^5, R_{-2}^5 \text{ et } R_{-4}^7 \Rightarrow g = \frac{-20x^3 - 8x^2 + 751x - 671}{5(5x - 9)(6x - 5)},$$

$$h = \frac{-70x^4 - 371x^3 + 1630x^2 - 963x - 434}{10(5x - 9)(6x - 5)},$$

$$b_1 = \frac{-70x^2 - 21x + 195}{20(5x - 9)},$$

$$R_{-1}^5 \Rightarrow b_2 = \frac{-70x^4 - 1201x^3 + 1619x^2 - 3667x + 3927}{32(10x^3 + 66x^2 - 97x + 37)}.$$

Dans le premier cas, l'équation $([e_2, e_3] - e_5)u_0 = 0$ permet d'exprimer b_3 comme un quotient de deux polynômes en x de degrés 7 et 6. Les numérateurs des fractions rationnelles en x R_{-3}^7 et R_{-2}^7 sont alors des polynômes en x de degrés 7 et 10 qui n'ont pas de racines communes.

Dans le deuxième cas, les numérateurs des fractions rationnelles en x R_{-3}^7 et R_1^5 sont des polynômes en x de degrés 7 et 5 qui n'ont pas de racines communes.

(ii) Si $c = 0$. Comme le module n'est pas une extension, on peut supposer $d = 1$. R_{-4}^5 et $R_{-6}^7 \Rightarrow x = 9/5$ et $f = 3/2$; R_{-3}^5 , R_{-5}^5 et $R_{-4}^7 \Rightarrow g = 1$, $h = 1/5$ et $b_1 = -3/5$. Mais alors $R_{-1}^5 \Rightarrow b_2 = -6/5$, tandis que $R_{-3}^7 \Rightarrow b_2 = -21/5$, contradiction.

5.8. Démonstration des Théorèmes 2 et 3.

5.8.1. Le théorème 3 est une conséquence de la proposition suivante lorsque $s = t = 0$.

Proposition. Soient $r = -2$ et n l'algèbre de Lie de dimension $n = 11$: $n = \mathfrak{a}_{r,s,t}$ (cf. 4.1 et 4.2) et M un n -module fidèle nilpotent de dimension $m \leq n + 1$; alors le \bar{n} -module gradué associé \bar{M} (cf. 4.3.1) est isomorphe au module M^∇ (cf. 1.3) ou à son dual $(M^\nabla)^*$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 4.3.1 et de l'étude des divers cas du tableau V que nous avons menée dans les parties 5.2 à 5.7; remarquer que, comme il n'existe ni \bar{n} -modules Troués, ni \bar{n} -modules Bitroués, il n'existe pas non plus d'extensions de tels modules.

5.8.2. Le théorème 2 est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition. Soient $r = -2$, $s \neq 0$ et n l'algèbre de Lie de dimension $n = 11$: $n = \mathfrak{a}_{r,s,t}$ (cf. 4.1 et 4.2). Alors n n'a pas de représentation linéaire fidèle de dimension $n + 1$.

Remarque. Cette proposition et la précédente sont probablement vraies pour toutes les valeurs de r sauf un nombre fini.

Démonstration. (MA_9) Sinon, soit M un n -module fidèle de dimension minimale $m \leq n + 1$. On peut supposer M nilpotent. La proposition précédente prouve que le n -module gradué associé \bar{M} est M^∇ ou $(M^\nabla)^*$. Quitte à remplacer M par son dual, on peut supposer $\bar{M} = M^\nabla$.

Considérons le module de dimension 11: $M' = M/M^{\geq 12}$. On peut donc trouver une base v_1, \dots, v_{11} de M' telle que

$$\begin{aligned} e_1 v_i &= v_{i+1} \quad \text{pour } i \neq 2 \text{ et } 11, \\ e_1 v_2 &= x v_4 \quad \text{mod } V^{\geq 5}, \\ e_1 v_{11} &= 0; \\ e_2 v_i &= b_i v_{i+2} + y_i v_{i+3} \quad \text{mod } V^{\geq i+4}, \quad \text{pour } i \neq 1, 9, 10 \text{ et } 11, \\ e_2 v_1 &= v_3, \quad e_2 v_9 = b_9 v_{11}, \\ e_2 v_{10} &= 0, \quad e_2 v_{11} = 0, \end{aligned}$$

où la suite $(b_i)_{1 \leq i \leq 9}$ est égale à $(2, -1, 0, 1, 1, -2, -5, -13/5, 26/5)$.
Notons

C_i^5 : le coefficient de $([e_2, e_3] - e_5)v_i$ sur v_{i+6} , pour $1 \leq i \leq 5$

C_i^7 : le coefficient de $([e_2, e_5] - re_7 - se_8)v_i$ sur v_{i+8} , pour $1 \leq i \leq 3$.

On obtient ainsi le système de huit équations linéaires avec second membre en les huit inconnues x, y_2, \dots, y_8 :

$$\begin{aligned} C_1^5 : 2x - 2y_2 + 2y_3 - 5y_4 &= 0, \\ C_2^5 : 6y_2 - y_4 + 2y_5 &= 0, \\ C_3^5 : 9y_3 - 8y_4 + 3y_5 &= 0, \\ C_4^5 : 3y_4 - 14y_5 + 10y_6 - 5y_7 &= 0, \\ C_5^5 : -60y_5 + 11y_6 + 20y_7 - 25y_8 &= 0, \\ C_1^7 : 20x - 5y_2 + 2y_3 - 6y_4 + 6y_5 - 7y_6 &= -8s, \\ C_2^7 : -24y_2 - 5y_4 + 15y_5 - 15y_6 + 10y_7 &= 5s, \\ C_3^7 : -18y_3 + 64y_4 - 89y_5 + 63y_6 - 25y_7 &= 13s, \end{aligned}$$

Notons A cette matrice 8×8 à coefficients entiers; elle n'est pas inversible: cela est dû à la possibilité de changer v_1 en $v_1 + \alpha v_2$. On vérifie que la forme linéaire: $f = (4080, -4000, -290, -3825, 0, -408, -1255, 263)$ est dans le noyau de la transposée de A , mais que le vecteur du second membre: $V = (0, 0, 0, 0, 0, -8s, 5s, 13s)$ vérifie: $f(V) = 408s$. Ce vecteur V n'est pas donc pas dans l'image de A , contradiction.

6. En dimension inférieure ou égale à 7

Vérifions, pour justifier partiellement la complexité de nos exemples, le lemme suivant:

Lemme. *Toute nilvariété compacte de dimension inférieure ou égale à 7 admet une structure affine complète.*

Démonstration. Soient N le groupe de Lie nilpotent revêtement universel de W et $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur N .

1^{er} cas: L'algèbre de Lie \mathfrak{n} admet une graduation positive [13].

On note D la dérivation inversible de \mathfrak{n} donnée par $D(X_i) = iX_i$ si $d^0 X_i = 1$. La formule de Scheuneman: $\nabla_X Y = D^{-1}([X, DY])$, pour X, Y dans \mathfrak{n} , définit une connexion plate sans torsion complète et invariante à gauche sur N et induit donc une structure affine complète sur W . Remarquons que le \mathfrak{n} -module affine fidèle associé à cette connexion est le module M^∇ de 1.3.

Cas général. On remarque en utilisant la liste des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7 (voir par exemple [3] ou [13]) que: Il existe une algèbre de Lie positivement graduée \mathcal{L} de dimension inférieure ou égale à 8 et un idéal \mathcal{F} (non nécessairement gradué) du centre de \mathcal{L} tel que \mathfrak{n} est isomorphe à \mathcal{L}/\mathcal{F} .

On note $p : \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{n}$ la projection. Pour X, Y dans \mathfrak{n} , on note \tilde{X} et \tilde{Y} des éléments de \mathcal{L} tels que $p(\tilde{X}) = X$ et $p(\tilde{Y}) = Y$. On pose $\nabla_X Y = p(D^{-1}([\tilde{X}, D\tilde{Y}]))$. Cette formule ne dépend pas du choix de \tilde{X} et \tilde{Y} ; elle définit une connexion plate sans torsion complète et invariante à gauche sur N et induit donc une structure affine complète sur W .

References

- [1] L. Auslander, *Simply transitive groups of affine motions*, Amer. J. Math. **99** (1977) 809–826.
- [2] N. Boyom, *Sur les structures affines homotopes à zéro des groupes de Lie*, J. Differential Geometry **31** (1990) 859–911 et **38** (1993) 463.
- [3] R. Carles, *Weight systems for nilpotent Lie algebras of dimension 7 over \mathbb{C}* , preprint Univ. Poitiers, **47**, 1989.
- [4] K. Dekimpe & P. Igodt, *Computational aspects of affine representations for torsion free nilpotent groups via the Seifert construction*, Kortrijk, 1992, preprint.
- [5] D. Fried, W. Goldman & M. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv. **56** (1981) 487–523.
- [6] H. Fujiwara, *Affine structures of some solvable Lie groups*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **25** (1980) 1495–1505.
- [7] Annexe à “Une nilvariété non affine”: 9 programmes de calcul.
- [8] A. Medina-Perea, *Flat left invariant connections adapted to the automorphism structure of a Lie group*, J. Differential Geometry **16** (1981) 445–474.
- [9] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Advances in Math. **25** (1977) 178–187.
- [10] M. Nisse, *Structure affine des infranilvariétés et infrasolvariétés*, C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1990) 667–670.
- [11] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, Berlin, 1972.
- [12] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Algebra **24** (1989) 167–189.
- [13] J. Scheuneman, *Examples of locally affine spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971) 589–592.
- [14] M. Vergne, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970) 81–116.
- [15] S. Yamaguchi, *On complete affinely flat structure of solvable Lie groups*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **33** (1979) 209–218.